



ИССЛЕДОВАНИЕ ГРАНИЦ ПРИМЕНЕНИЯ УРАВНЕНИЯ НАЧАЛЬНЫХ ПАРАМЕТРОВ ДЛЯ ПОСТРОЕНИЯ УПРУГОЙ ЛИНИИ БАЛКИ

И.И. Николаев, магистрант второго курса, ФГБОУ ВО
«Калининградский государственный
технический университет»
e-mail: igornikolaevlit@yandex.ru

Д.А. Романюта, магистрант второго курса, ФГБОУ ВО
«Калининградский государственный
технический университет»
e-mail: dmitriy-marcus@yandex.ru

В работе описан наиболее популярный метод построения упругой линии балки (линии прогибов) с помощью уравнения метода начальных параметров. На примере четырех различных балок (двух двутавров и двух балок прямоугольного сечения) произведен расчет упругой линии балки с помощью уравнения начальных параметров и с помощью метода конечных элементов. Произведено сравнение результатов расчетов в части начального и максимального прогибов балки, а также начального угла поворота её поперечного сечения. Выделены границы применения уравнения начальных параметров для двутавровой и прямоугольной балок.

метод начальных параметров, упругая линия балки, линия прогибов, чистый изгиб, границы применения, FEMAP NX Nastran

В результате воздействия внешних сил, вызывающих прямой изгиб балки, ее первоначальная прямая ось изгибается, превращаясь в кривую линию, которая называется упругой линией балки, или линией прогибов [1]. В некоторых инженерных задачах построение этой линии является неотъемлемой, а иногда даже основной, частью расчета. По этой причине методу построения упругой линии балки следует уделить особое внимание.

В классической теории сопротивления материалов для построения линии прогиба балки при прямом изгибе используется дифференциальное уравнение упругой линии с ее последующим интегрированием. Однако определение перемещений методом непосредственного интегрирования дифференциального уравнения упругой линии в случае балок с большим числом участков, на каждом из которых свое выражение изгибающего момента, сопряжено со значительными трудностями, связанными с определением произвольных постоянных интегрирования [2]. Так расчет становится затруднительным уже при наличии трех участков.

В целях упрощения расчетов в сопротивлении материалов для построения линии прогибов балки используется обобщенное уравнение упругой линии, полученное в результате использования специальных приемов интегрирования и некоторых допущений. Это уравнение имеет в своем составе две характерных величины – начальный прогиб балки y_0 и начальный угол поворота поперечного сечения балки θ_0 . В совокупности два этих параметра называются начальными параметрами балки. Отсюда обобщенное уравнение упругой линии балки получило своё название – уравнение начальных параметров.

С помощью этого уравнения имеется возможность определить прогиб балки в любом ее сечении и угол поворота этого сечения. Вместе с тем, как показывает практика, не всегда расчет балки методом начальных параметров дает результаты, соответствующие реальным экспериментальным данным. Поэтому возникает вопрос об определении границ применения этого уравнения.

Было выдвинуто предположение, что граница применимости метода обуславливается неким коэффициентом k_B , определяющимся как отношение длины балки l к высоте h ее профиля.

Решение поставленной задачи предлагается осуществить следующим образом:

1. Рассчитать ряд балок различной длины и высоты профилей методом начальных параметров; при этом определяются значения начального прогиба балки, начального угла поворота поперечного сечения балки и максимального прогиба.

2. Произвести расчет тех же балок с помощью метода конечных элементов (МКЭ), определив те же характеристики.

3. Сравнить полученные результаты и определить, при каком соотношении h/l уравнение метода начальных параметров дает достоверные результаты с точностью 1,5 %.

С целью подтверждения/опровержения выдвинутой гипотезы были проведены сравнительные расчеты четырех различных балок:

1. Сварной двутавр № 5, вид и размер которого приведены на рис. 1.

2. Сварной двутавр № 10, вид и размер которого приведены на рис. 2.

3. Полоса, шириной 50 мм и толщиной 5 мм.

4. Полоса, шириной 50 мм и толщиной 10 мм.

Такой выбор профилей обусловлен тем, что в дальнейшем, в случае продолжения данной работы, есть возможность проводить натурные испытания таких балок.

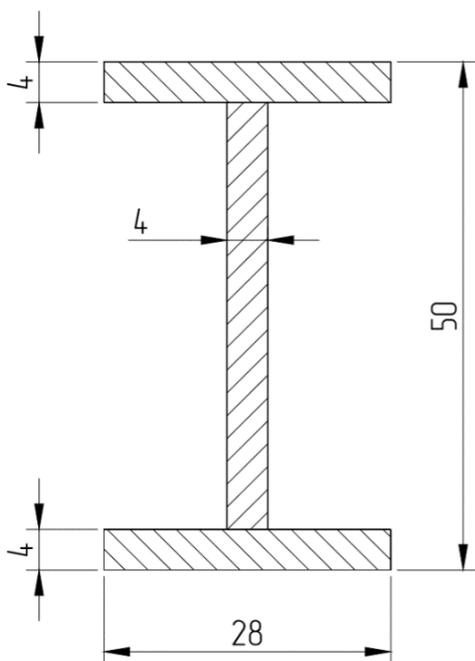


Рисунок 1 – Рассматриваемый двутавр № 5

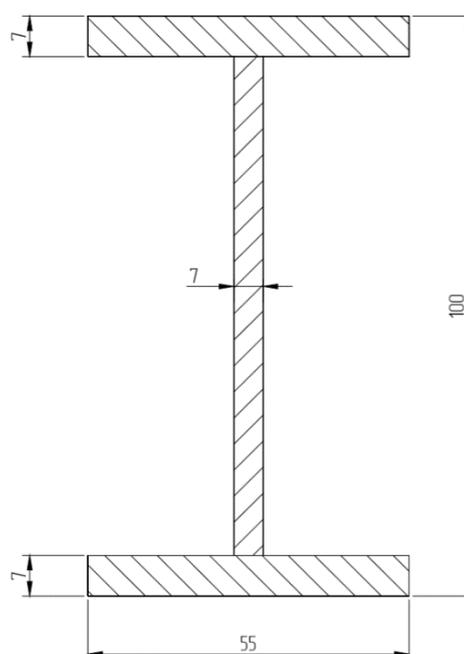


Рисунок 2 – Рассматриваемый двутавр № 10

В качестве исследуемого вида нагружения был выбран двухточечный изгиб. Такое нагружение создает на участке балки, располагаемом между опорами, состояние чистого изгиба, при котором в поперечных сечениях отсутствует поперечная сила и имеется только изгибающий момент. Как следствие, на этом участке отсутствуют касательные напряжения и имеются только нормальные. Эпюра внутренних силовых факторов представлена на рис. 3. Соотношения размеров участков балки представлено в табл. 1.

Задание расстояния от опоры до точки приложения силы и от точки приложения силы до конца балки, как функции от расстояния между опорами необходимо для того, чтобы в дальнейшем упростить математическую модель метода начальных параметров.

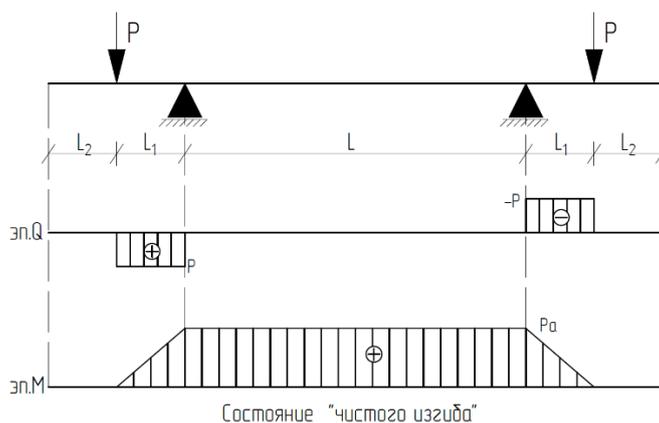


Рисунок 3 – Эпюра внутренних силовых факторов рассматриваемой балки

Таблица 1 – Соотношение размеров участков балки

Наименование	Обозначение	Размер
Расстояние между опорами	L , м	L
Расстояние от опоры до точки приложения силы	L_1 , м	$0,2L$
Расстояние от точки приложения силы до конца балки	L_2 , м	$0,2L$

Расчет балок методом начальных параметров производился в программе MathCad 15. Уравнение для выбранной схемы балки (рис. 3) выглядит следующим образом:

$$EIy = EIy_0 + EI\theta_0 x - \left(\frac{F(x - L_2)^3}{6}\right)_{x=L_2} + \left(\frac{R_1(x - L_1 - L_2)^3}{6}\right)_{x=L_1+L_2} + \left(\frac{R_2(x - L_1 - L_2 - L)^3}{6}\right)_{x=L_1+L_2+L} - \left(\frac{F(x - L_1 - L_2 - L - L_1)^3}{6}\right)_{x=L_1+L_2+L+L_1}.$$

Расчет МКЭ производился в программе «FEMAP NX Nastran» v11.4.1. По окончании вычислений записывались данные по начальному прогибу балки, начальному углу поворота поперечного сечения балки и максимального прогиба балки. На рис. 4 показана эпюра прогиба балки на примере двутавра № 5 длиной 1,8 м. На рис. 5 – эпюра углов поворота поперечного сечения той же балки.

По результатам сравнения расчетов можно отметить следующее:

1. Результаты расчета двутаврового профиля № 10 аналогичны результатам двутаврового профиля № 5.
2. Результаты расчета полосы 5x50 аналогичны результатам расчета полосы 10x50.
3. Величина начального угла поворота поперечного сечения балок (двутавровой и с прямоугольным профилем) и максимального прогиба при расчете с помощью методов конечных элементов и начальных параметров одинакова. Следовательно, эти параметры не зависят от значения коэффициента k_B .
4. Величина начального прогиба двутавровой балки сильно зависит от величины коэффициента k_B , что отражено в табл. 2. Графическая зависимость погрешности определения начального прогиба балки методом начальных параметров от значения коэффициента k_B показана на рис. 6.
5. Величина начального прогиба балки с профилем в виде полосы сильно зависит от величины коэффициента k_B , что отражено в табл. 3. Графическая зависимость погрешности определения начального прогиба балки методом начальных параметров от значения коэффициента k_B показана на рис. 7.

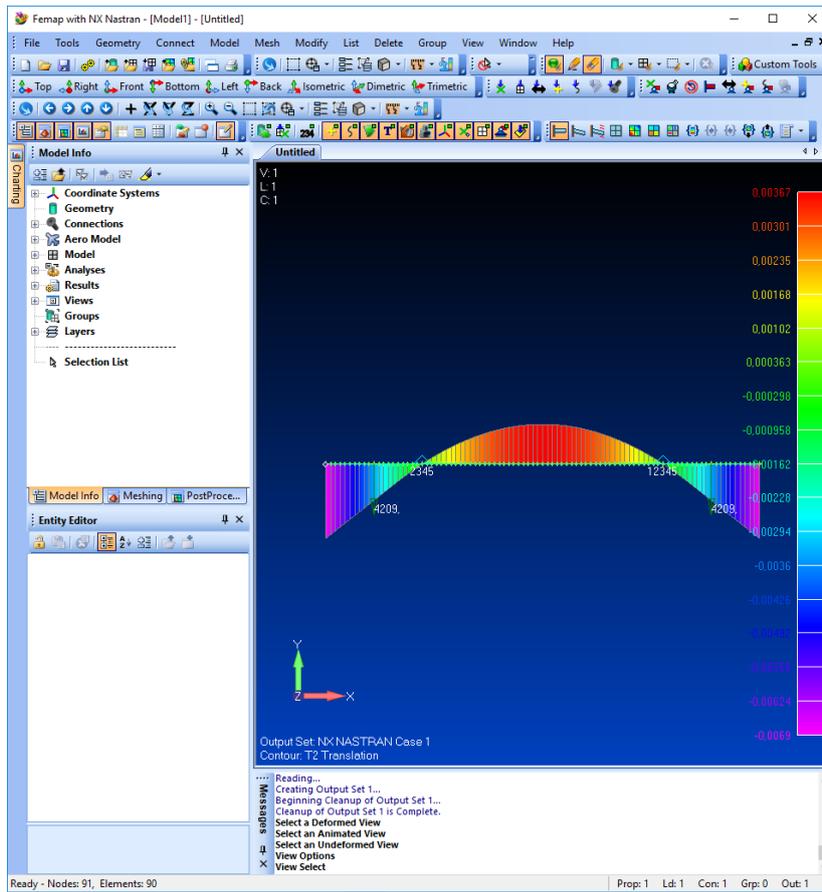


Рисунок 4 – Построенная эпюра прогибов балки

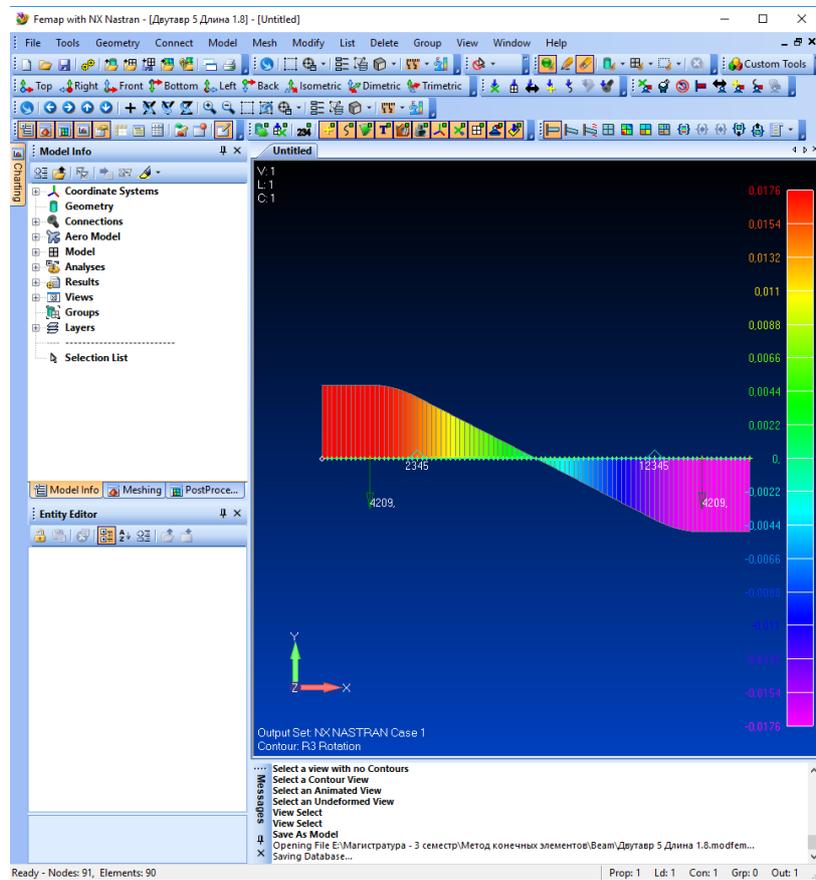


Рисунок 5 – Построенная эпюра углов поворота поперечных сечений балки

Таблица 2 – Сравнение результатов расчета начального прогиба двутавровой балки

№ п/п	Отношение длины балки к высоте	Начальный прогиб балки, полученный с помощью математической модели, мм.	Начальный прогиб балки, полученный с помощью МКЭ, мм.	Погрешность математического расчета, %
1	3,6	-0,068	-0,129	47,29
2	7,2	-0,274	-0,334	17,96
3	10,8	-0,616	-0,676	8,88
4	14,4	-1,095	-1,16	5,60
5	18	-1,711	-1,77	3,33
6	21,6	-2,464	-2,52	2,22
7	25,2	-3,354	-3,41	1,64
8	28,8	-4,38	-4,44	1,35

Таблица 3 – Сравнение результатов расчета начального прогиба балки с профилем в форме полосы

№ п/п	Отношение длины балки к высоте	Начальный прогиб балки, полученный с помощью математической модели, мм.	Начальный прогиб балки, полученный с помощью моделирования балки, мм.	Погрешность математического расчета, %
1	3,6	-0,00684	-0,00953	28,23
2	7,2	-0,0273	-0,0292	6,51
3	10,8	-0,0616	-0,0635	2,99
4	14,4	-0,109	-0,111	1,80
5	18	-0,171	-0,173	1,16

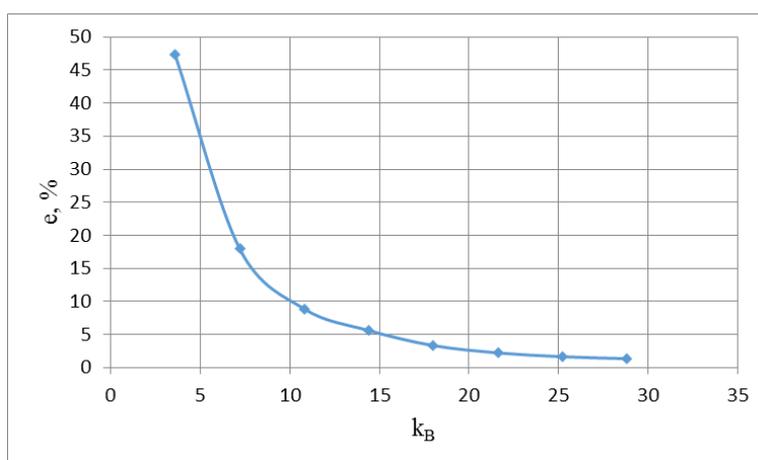


Рисунок 6 – Зависимость погрешности определения начального прогиба двутавровой балки, e , от коэффициента k_B

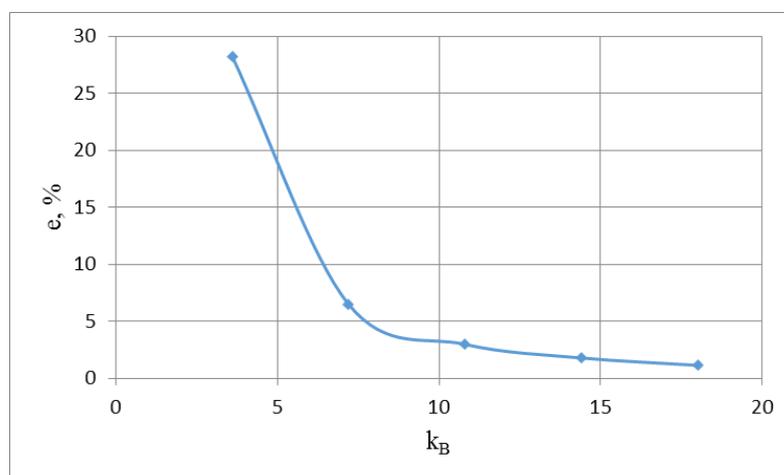


Рисунок 7 – Зависимость погрешности определения начального прогиба балки, e , от коэффициента k_B для балки с профилем в виде полосы

Обобщая вышесказанное, можно сделать следующие выводы:

1. Начальный угол поворота поперечного сечения балки и максимальный её прогиб не зависят от значения коэффициента k_B .

2. Величина начального прогиба двутавровой балки сильно зависит от величины коэффициента k_B . Как можно заметить, при значении k_B , равным 3,6, погрешность расчета составляет около 50 % и является недопустимой. Принимая допустимую погрешность в 5 %, можно сказать, что уравнение начальных параметров для двутавровых балок надо применять только в том случае, когда отношение длины балки к высоте её профиля больше 14,11.

3. Величина начального прогиба балки с профилем в виде полосы сильно зависит от величины коэффициента k_B . Как можно заметить, при значении k_B , равным 3,6, погрешность расчета составляет около 30 % и является недопустимой. Принимая допустимую погрешность в 1,5 %, можно сказать, что уравнение начальных параметров для балки с профилем поперечного сечения в форме полосы можно применять только в том случае, когда отношение длины балки к высоте её профиля больше 8,5.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Александров, А. В. Соппротивление материалов: учеб. для вузов / А. В. Александров, В. Д. Потапов, Б. П. Державин; под ред. А. В. Александрова. – Изд. 4-е, испр. – Москва: Высш. шк., 2004. – 559 с.

2. Варданян, Г.С. Соппротивление материалов (с основами строительной механики): учеб. для вузов по направлению «Строительство» / Г. С. Варданян, Н. М. Атаров, А. А. Горшков; под ред. Г. С. Варданяна. – Москва: ИНФРА-М, 2003. – 478 с.

INVESTIGATION OF THE BORDERS OF APPLICATION OF THE EQUATION OF INITIAL PARAMETERS TO CONSTRUCT THE ELASTIC LINE OF BEAMS

D.A. Romanyuta, second-year graduate student,

Kaliningrad State Technical University

e-mail: dmitriy-marcus@yandex.ru

I.I. Nikolaev, second-year graduate student,

Kaliningrad State Technical University

e-mail: igornikolaevlit@yandex.ru

The paper describes the most popular method for constructing an elastic line of a beam (line-deflection) using the equation of the method of initial parameters. Using the example of four different beams (two I-beams and two beams of rectangular section), the elastic line of the beam is calculated both algebraically (using the equation of initial parameters) and using the finite element method. A comparison was made of the calculation results in terms of the initial deflection of the beam, the initial angle of rotation of the cross-section of the beam, and the initial deflection of the beam. Borders of application of the equation of initial parameters for I-beam and rectangular beams are highlighted.

the method of initial parameters, the elastic line of the beam, the line of deflection, pure bending, the boundaries of application, FEMAP NX Nastran