



ИССЛЕДОВАНИЕ ВЛИЯНИЯ НАЧАЛЬНЫХ УСЛОВИЙ НА УСТАНОВИВШИЕСЯ ПРОЦЕССЫ В ФЕРРОРЕЗОНАНСНОМ КОНТУРЕ НА ОСНОВЕ РЕШЕНИЯ УРАВНЕНИЯ ДУФФИНГА

И.Е. Кажекин, кандидат технических наук,
ФГБОУ ВО «Калининградский государственный технический
университет»

e-mail: kazhekin@mail.ru

В статье рассмотрено описание феррорезонансного контура на основе уравнения Дуффинга. Приведены основные выражения, определяющие возможность возникновения феррорезонанса, также амплитуды колебаний в различных состояниях контура. Изложен подход к оценке влияния начальных условий на возможность возбуждения феррорезонансных колебаний в контуре.

феррорезонанс напряжений, нелинейные колебания, уравнение Дуффинга, перенапряжения, однофазные замыкания

Введение

Образование феррорезонансного контура в электросетях, вне зависимости от их напряжения и конфигурации, представляет большую опасность. Такие контуры могут формироваться при различных видах несимметрии в электрических сетях, сочетающих емкостные и нелинейные индуктивные элементы [1]. Один из примеров возникновения феррорезонанса описан в [2]. Нелинейный колебательный контур в рассматриваемом случае возникает при однофазных замыканиях в низковольтных судовых электроэнергетических системах с нейтралью, заземленной через реактор. Особенностью процессов является то, что контур образуется при контакте фазы с корпусом судна [3]. Поэтому на феррорезонансные процессы накладываются еще и дуговые, что значительно усложняет анализ процесса. Дуговые процессы во многом определяют начальные условия при очередном замыкании фазы на корпус и формировании феррорезонансного контура. Это приводит к тому, что перенапряжения в таких сетях могут значительно превосходить перенапряжения в сетях с изолированной нейтралью [4]. Учитывая, что способ заземления нейтрали является основой при построении защиты от однофазных замыканий и при его выборе необходимо учитывать все последствия применения того или иного варианта [5], весьма важным является исследование феррорезонансного контура, формирующегося при заземлении нейтрали через реактор.

Несмотря на то, что исследованию колебательных контуров с нелинейной индуктивностью посвящено достаточно много работ, в настоящее время остаются трудности при его математическом описании. Эти трудности обусловлены тем, что использование более точного описания усложняет анализ процессов и оценку влияния на них различных факторов. Упрощение описания, как правило, ведет к снижению точности расчетов процессов в контуре. В статье предлагается подход к оценке возможности возникновения феррорезонанса на основе решения уравнения Дуффинга, что с одной стороны позволяет несколько повысить точность расчетов, по сравнению, например с [1], с другой – получить выражения, удобные для исследования влияния различных факторов на характер колебаний в нелинейном контуре.

Описание феррорезонансного контура

Схема феррорезонансного контура, образующегося в рассматриваемом случае, приведена на рисунке.

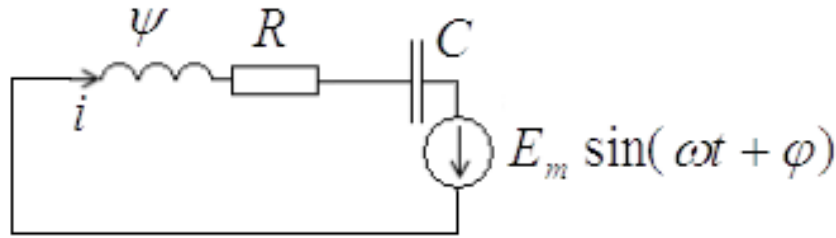


Рисунок – Схема феррорезонансного контура

Изображенная схема может быть описана следующим уравнением [6]:

$$\frac{d\psi}{dt} + R \cdot i + \frac{1}{C} \int i dt = E_m \sin(\omega t + \varphi) \quad (1)$$

При этом для описания нелинейного индуктивного элемента довольно часто предлагается выражение на основе кубического полинома:

$$i = \alpha \cdot \psi + \beta \cdot \psi^3 \quad (2)$$

Из (1) и (2) можно получить выражение:

$$\frac{d^2\psi}{dt^2} + R \cdot \alpha \cdot \left(1 + \frac{3 \cdot \beta \cdot \psi^2}{\alpha}\right) \frac{d\psi}{dt} + \frac{\alpha}{C} \psi + \frac{\beta}{C} \psi^3 = k \cdot \omega \cdot E_{m0} \cos(\omega t + \varphi) \quad (3)$$

Используя обозначения $\omega_0 = \sqrt{\alpha/C}$, $\psi_0 = \omega \cdot E_{m0} / \omega_0^2$, $a = \omega / \omega_0$, $x = \psi / \psi_0$, $\tau = \omega_0 \cdot t$, $\lambda = \beta / \alpha$, $\psi_0 = (\beta / \alpha) \cdot (\omega \cdot E_{m0} / \omega_0^2)^2$, $2 \cdot \delta = R \cdot a / \omega_0$, выражение (3) можно привести к следующему виду:

$$\frac{d^2x}{d\tau^2} + 2 \cdot \delta \cdot (1 + 3 \cdot \lambda \cdot x^2) \frac{dx}{d\tau} + x + \lambda \cdot x^3 = k \cdot \cos(a \cdot \tau + \varphi) \quad (4)$$

Если в выражении (4) не учитывать $3 \cdot \lambda \cdot x^2$, то оно может быть записано в виде уравнения Дуффинга:

$$\frac{d^2x}{d\tau^2} + 2 \cdot \delta \frac{dx}{d\tau} + x + \lambda \cdot x^3 = k \cdot \cos(a \cdot \tau + \varphi) \quad (5)$$

Уравнение (5) достаточно подробно исследовано и может быть использовано для определения условий возникновения феррорезонанса.

Решение уравнения Дуффинга

В литературе предлагаются различные подходы к решению уравнения Дуффинга. Наиболее простым и точным является использование численных методов, например, Булирша-Штера, Розенброка и др., встроенных в ряд программных сред [7]. Однако такое решение значительно затрудняет дальнейшее исследование влияния различных факторов на установившиеся колебания.

Использование же упрощенных методов расчета приводит к снижению точности, однако одновременно с этим упрощается процесс исследования влияния начальных условий и параметров феррорезонансного контура на величину колебаний. Кроме того, при использовании упрощенных методов появляется возможность оценки амплитуды, соответствующей неустойчивому состоянию равновесия.

Один из таких упрощенных подходов к решению уравнения Дуффинга изложен в [8]. Согласно этому подходу число корней уравнения может быть определено по следующему выражению:

$$n = \begin{cases} 1, & \text{при } c < 1; \\ 3, & \text{при } c \geq 1, \end{cases} \quad (6)$$

где c - коэффициент, определяемый по выражению (7):

$$c = \frac{4 \cdot (\omega^2 - 1)}{3 \cdot \sqrt[3]{12 \cdot \lambda \cdot k}} \quad (7)$$

Выражение (6) формулирует условия формирования феррорезонансного контура. При сочетании параметров цепи, соответствующим $c < 1$, можно сделать вывод, что феррорезонанс исключен, при $c \geq 1$ появляется возможность для его возникновения.

При этом амплитуда колебаний в феррорезонансном контуре может быть найдена следующим образом:

$$A_0 = -d \cdot \sqrt[3]{\frac{2 \cdot k}{3 \cdot \lambda}}, \quad (8)$$

где d - коэффициент, определяемый в результате решения кубического уравнения:

$$d^3 - 3 \cdot c \cdot d + 2 = 0 \quad (9)$$

Уравнение (9) при $c \geq 1$ имеет три корня, два из которых соответствуют большим и малым колебаниям или резонансному и нерезонансному состоянию рассматриваемого контура.

Влияние начальных условий на установившиеся колебания в феррорезонансном контуре

Состояние равновесия, в которое перейдет система при $c \geq 1$ после образования феррорезонансного контура, определяется начальными условиями. Устойчивые состояния равновесия образуют области притяжения. Любые начальные условия, соответствующие точкам одной из областей притяжения, приводят к определенному виду колебаний. Области притяжения различных видов колебаний могут быть найдены следующим образом [9]:

1. Определяются все решения уравнения.
2. Оценивается устойчивость найденных решений.

3. Границей между областями притяжения является кривая, представляющая собой геометрическое место образов, приближающихся к неустойчивому состоянию системы.

Таким образом, оценка достаточности начальных условий для возбуждения феррорезонансных колебаний в контуре может заключаться в их сопоставлении с амплитудой колебаний, найденной в соответствии с (8) для неустойчивого состояния равновесия. Если начальные условия превышают амплитуду неустойчивых колебаний, то в установившемся режиме контур окажется в состоянии феррорезонанса напряжений.

Предложенное решение имеет ряд допущений. В частности, не учитывается возможность возникновения колебаний на субгармониках и на гармониках, кратных трем. Точное определение амплитуды колебаний возможно только для нерезонансного режима. Для неустойчивых и резонансных колебаний необходимо учитывать весь возможный спектр гармоник. В то время как для цепи, изображенной на рисунке, в зависимости от ее параметров и начальных условий, могут быть получены следующие виды феррорезонанса [10]:

- феррорезонанс на основной частоте, сопровождающийся появлением высших гармонических составляющих;
- субгармонический феррорезонанс;
- квазипериодический феррорезонанс, характеризующийся широким спектром гармонических составляющих тока контура;
- хаотический феррорезонанс; режим, при котором возникает непрерывный спектр гармоник.

Однако для оценки возможности возбуждения феррорезонанса достаточно иметь представления о границах области притяжения нерезонансных колебаний. Если до образования феррорезонансного контура на элементах сформировались начальные значения переменных, выходящие за эти границы, то включение контура приведет к переходу системы в один из видов феррорезонанса.

Заключение

Установленные соответствия между описанием колебательного контура, содержащего нелинейный индуктивный элемент, и решением уравнения Дуффинга позволяют провести оценку возможности возникновения феррорезонанса напряжений исходя из параметров элементов контура. Помимо этого, при установлении возможности возникновения феррорезонансных колебаний в нелинейной цепи на основе приведенных выражений можно оценить величины и соотношения начальных условий, при которых система окажется в состоянии феррорезонанса.

Описанные в работе исследования выполнены при финансовой поддержке РФФИ в рамках научного проекта № 18-38-00622.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Гиндуллин, Ф.А. Перенапряжения в сетях 6–35 кВ / В.Г. Гольдштейн, А.А. Дульзон, Ф.Х. Халилов. – Москва: Энергоатомиздат, 1989. – 192 с.
2. Кажекин, И.Е. Феррорезонансные процессы при однофазных замыканиях в судовых электроустановках с компенсированной нейтралью / И.Е. Кажекин // Известия КГТУ. – 2019. – № 52. – С. 145-153.
3. Благинин, В.А. Описание феррорезонансных процессов при однофазных замыканиях в судовых электроэнергетических системах с компенсированной нейтралью / В.А. Благинин, В.И. Лозовенко, И.Е. Кажекин // Инновации в науке и образовании – 2011: IX Междунар. науч. конф.: в 2-х частях: труды. – 2011. – С. 427-430.
4. Благинин, В.А. Дуговые перенапряжения в судовых электросистемах с различными режимами нейтрали / В.А. Благинин, В.И. Лозовенко, И.Е. Кажекин // Известия КГТУ. – 2008. – № 13. – С. 118-121.
5. Кажекин, И.Е. Определение требований к защите судовых электроэнергетических систем от однофазных замыканий / И.Е. Кажекин // Электрика. – 2011. – № 3. – С. 35-38.
6. Филиппов, Е. Нелинейная электротехника / Перевод [с нем.] и доп. А. З. Кулебякина. – Москва: Энергия, 1968. – 503 с.
7. Гурский, Д.А. Вычисления в MathCad 12 / Д.А. Гурский, Е.С. Турбина. – Санкт-Петербург: Питер. – 2006. – 544 с.

8. Баев, С.В. Построение аналитического решения уравнения дUFFинга / С.В. Баев, Ю.С. Пикуш // Вісник Придніпровської державної академії будівництва та архітектури. – 2009. – № 6-7 (137). – С. 43-48.
9. Хаяси, Т. Нелинейные колебания в физических системах / Т. Хаяси; под ред. В. Е. Боголюбова; пер. с англ. Б. А. Болдова, Г. Г. Гусева. – Москва: Мир, 1968. – 432 с.
10. Ferracci P. Ferroresonance / P. Ferracci // Cahier technique. – Paris: Schneider Electric, 1998. – No. 190. – P. 1 – 28.

RESEARCH THE EFFECT OF PRIMARY CONDITIONS ON STATIONARY PROCESSES IN A FERROSONANCE CIRCUIT BASED ON SOLUTION DUFFING EQUATION

I.E. Kazhekin, Associate Professor,
Kaliningrad State Technical University
e-mail: kazhekin@mail.ru

The article describes the description of the ferroresonance circuit based on the Duffing equation. The main expressions that determine the possibility of ferroresonance, as well as the amplitudes of oscillations in different states of the circuit are given. The approach to estimating the influence of initial conditions on the possibility of exciting ferroresonant oscillations in the circuit is described.

ferroresonance, nonlinear oscillations, Duffing equation, overvoltage, single-phase circuit