



## РАЗРАБОТКА МАТЕМАТИЧЕСКОЙ МОДЕЛИ ПРОЦЕССА ЛАЗЕРНОГО СКАНИРОВАНИЯ КРУГЛЫХ ПИЩЕВЫХ ПРОДУКТОВ

А.Е. Ерыванов, аспирант,  
anatoliy.eryvanov@klgtu.ru

Н.В. Самойлова, аспирант,  
procyon@mail.ru

О.В. Агеев, канд. техн. наук, доцент,  
oleg.ageev@klgtu.ru

Ю.А. Фатыхов, д-р техн. наук, профессор,  
elina@klgtu.ru

ФГБОУ ВО «Калининградский государственный технический университет»

М.А. Падалко, аспирант,  
padalkom@gmail.com

ФГАОУ ВО «Балтийский федеральный университет им. И. Канта»

Показана актуальность применения активной лазерной локации для измерения геометрических параметров и положения пищевых продуктов. Рассмотрены режимы лазерной локации продукта круглой формы при круговом сканировании подсвечивающего элемента. Разработана математическая модель, описывающая отраженный световой поток в функции скорости движения объекта, частоты сканирования, радиуса зоны сканирования и радиуса подсвечивающего элемента. Численным методом исследованы зависимости отраженного светового потока от времени при различных скоростях движения измеряемого объекта круглой формы, различных радиусах подсвечивающего элемента и различных частотах кругового сканирования.

*лазер, сканирование, подсвечивающий элемент, светимость, световой поток, продукт, модель*

Значительные достижения квантовой электроники позволяют разрабатывать оптико-электронные модули для сбора данных на основе средств активной лазерной локации [1]. При этом реализуются следующие функции: автоматическое измерение параметров продукции прямым методом; сбор данных для активного контроля технологического процесса; обеспечение точности настройки рабочих органов оборудования; повышение качества обработки сырья; экономия ценных пищевых ресурсов.

Применение лазера в качестве источника света позволяет получить световое пятно (подсвечивающий элемент) малого диаметра и тем самым исследовать весьма малые участки и тонкие структуры [2]. Техническая реализация активного лазерного локатора, основанного на фотометрическом методе, состоит в том, что исследуемый объект подсвечивается узким лучом лазера. Луч с помощью оптической системы формируется в пятно малого диаметра, которое линейно перемещается вдоль поверхности объекта, а объект перемещается относительно луча лазера. Фотоприемник облучается отраженным от объекта световым потоком, причем сила фототока определяется облученностью приемного зрачка.

Информация, которую заключают в себе локационные сигналы, содержит данные о геометрических параметрах измеряемого продукта [3]. Для надежного выделения полезного сигнала из помех требуется, чтобы сигнал обладал признаками, существенно отличающимися от признаков помех.

Электрические сигналы в активной системе лазерной локации возникают в результате модуляции отраженного светового потока при переходе подсвечивающего элемента с фона на поверхность объекта [4]. При этом фон обладает минимальной отражающей способно-

стью, а на объекте отраженный световой поток существенно увеличивается. Для исследования формы и параметров сигналов, а также для определения условий, при которых надежно измеряются геометрические параметры объекта, требуются математические модели локационных сигналов.

Наиболее удобным средством математического описания локационных сигналов являются двойные интегралы от функции распределения яркости в области подсвечиваемого элемента. Формирование сигнала при таком подходе является результатом изменения границ и областей интегрирования, образующихся при пересечении движущегося подсвечиваемого элемента с подвижным объектом.

Пусть пищевой продукт (объект) имеет круглую форму и перемещается под лазерным локатором прямолинейно с постоянной скоростью. Подсвечивающий элемент представляет собой световое пятно, которое имеет форму круга. Установим, что отражающие свойства фона и объекта одинаковы во всех точках, а коэффициенты отражения фона и объекта равны 0 и 1 соответственно. Положим, что светимость внутри подсвечиваемого элемента распределена равномерно, при этом локационный сигнал в фотоприемнике формируется отраженным световым потоком. Начало координат в любой момент времени совпадает с центром подсвечиваемого элемента.

Из вышеизложенного следует, что минимум сигнала имеет место при расположении подсвечиваемого элемента вне объекта, когда отраженный световой поток достигает минимального значения. Максимум сигнала соответствует полному расположению подсвечиваемого элемента на объекте. Таким образом, при измерении мгновенного значения локационного сигнала задача состоит в определении площади участка подсвечиваемого элемента, наложенного на объект:

$$U_c = k \cdot \Phi, \quad (1)$$

где  $U_c$  – мгновенное значение локационного сигнала, В;  $\Phi$  – отраженный от объекта световой поток, лм;  $k$  – коэффициент аналого-цифрового преобразования, В/лм.

Рассмотрим режим кругового сканирования подсвечиваемого элемента, при котором элемент вращается вокруг неподвижного центра с постоянной угловой скоростью. При круговом сканировании имеет место многофазный режим взаимного расположения подсвечиваемого элемента и объекта.

1 фаза. Наложение подсвечиваемого элемента на объект отсутствует (рис. 1).

На рис. 1 приняты следующие обозначения:  $O''$  – центр вращения подсвечиваемого элемента;  $R$  – радиус зоны сканирования подсвечиваемого элемента;  $\beta$  – угол между осью абсцисс и отрезком  $O''O$  в заданный момент времени  $t$ ;  $\omega$  – частота кругового сканирования;  $L$  – расстояние между центром измеряемого объекта и центром вращения подсвечиваемого элемента в заданный момент времени  $t$ ;  $O$  – центр подсвечиваемого элемента;  $r_1$  – радиус подсвечиваемого элемента;  $r_2$  – радиус измеряемого объекта;  $l$  – расстояние между центром подсвечиваемого элемента и центром измеряемого объекта;  $O'$  – центр измеряемого объекта;  $v$  – скорость движения измеряемого объекта.

В первой фазе выполняется следующее условие:

$$l > (r_1 + r_2). \quad (2)$$

В связи с этим отраженный световой поток определяется выражением:

$$\Phi_1 = \iint_D (2 \cdot B(x, y)) dx dy = 0, \quad (3)$$

где  $D$  – половина области, образованной пересечением подсвечивающего элемента и измеряемого объекта;  $B(x, y)$  – функция распределения яркости в подсвечивающем элементе (функция распределения светимости подсвечивающего элемента).

2 фаза. Подсвечивающий элемент частично накладывается на измеряемый объект (рис. 2).

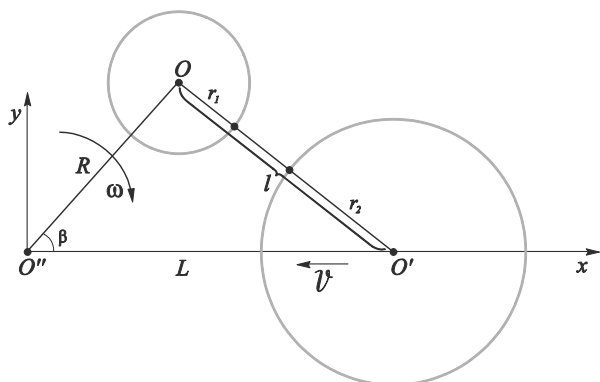


Рисунок 1 – Схема лазерной локации (первая фаза)

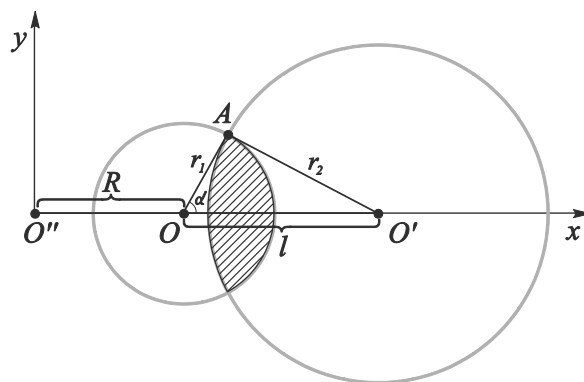


Рисунок 2 – Схема лазерной локации (вторая фаза)

На рис. 2 приняты следующие обозначения:  $A$  – точка пересечения границы подсвечивающего элемента и границы измеряемого объекта;  $\angle \alpha$  – угол между полярной осью  $OO'$  и отрезком  $OA$ . В втором случае выполняется следующее условие:

$$r_2 < l \leq (r_1 + r_2). \quad (4)$$

Отраженный световой поток в этой фазе определяется следующим выражением:

$$\Phi_2 = 2 \cdot \iint_D (B(r, \varphi) \cdot r) dr d\varphi = 2 \cdot \left( \int_0^\alpha d\varphi \int_0^{r_1} (B(r, \varphi) \cdot r) dr - \int_0^\alpha d\varphi \int_0^r (B(r, \varphi) \cdot r) dr + \int_0^\alpha d\varphi \int_r^{\eta} (B(r, \varphi) \cdot r) dr \right). \quad (5)$$

3 фаза. Подсвечивающий элемент частично накладывается на объект таким образом, что центр подсвечивающего элемента находится в пределах контура объекта (рис. 3).

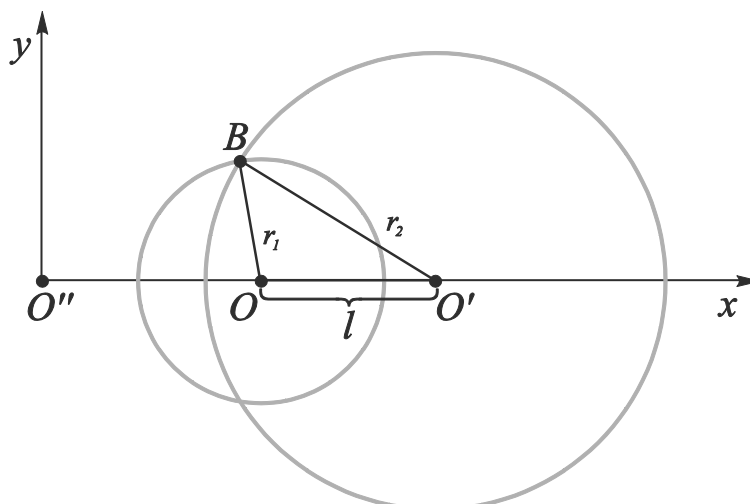


Рисунок 3 – Схема лазерной локации объекта (третья фаза)

На рис. 3 приняты следующие обозначения:  $B$  – точка пересечения границы подсвечивающего элемента и границы измеряемого объекта. При этом выполняется следующее условие:

$$(r_2 - r_1) < l \leq r_2. \quad (6)$$

С учетом (3) и (5) – (7), в этом случае отраженный световой поток определяется выражением:

$$\Phi_3 = 2 \cdot \int_0^\alpha d\varphi \int_0^{r_1} (B(r, \varphi) \cdot r) dr + 2 \cdot \int_\alpha^\pi d\varphi \int_0^r (B(r, \varphi) \cdot r) dr. \quad (7)$$

4 фаза. Подсвечивающий элемент полностью накладывается на объект. Выполняется следующее условие:

$$l < (r_2 - r_1). \quad (8)$$

В этом случае отраженный световой поток определяется выражением:

$$\Phi_4 = \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^{r_1} (B(r, \varphi) \cdot r) dr. \quad (9)$$

Для учета прямолинейного равномерного движения объекта определим расстояние между центром объекта и центром вращения подсвечивающего элемента (рис. 1):

$$L = L_0 - v \cdot t, \quad (10)$$

где  $v$  – скорость движения объекта;  $L_0$  – расстояние между центром объекта и осью вращения подсвечивающего элемента в начальный момент времени  $t = 0$ ;  $t$  – время движения объекта.

Угол между осью абсцисс и отрезком, соединяющим ось вращения подсвечивающего элемента и центр элемента:

$$\beta = \beta_0 - \omega \cdot t, \quad (11)$$

где  $\beta_0$  – угол между осью абсцисс и отрезком, соединяющим ось вращения подсвечивающего элемента и центр элемента в момент времени  $t = 0$ ;  $\omega$  – частота кругового сканирования;  $t$  – время движения объекта.

Введем дополнительную систему координат с центром отсчета в точке  $O''$ . Полярные координаты центра подсвечивающего элемента относительно оси кругового сканирования:

$$x = R \cdot \cos(\beta_0 - \omega \cdot t); \quad (12)$$

$$y = R \cdot \sin(\beta_0 - \omega \cdot t). \quad (13)$$

С учетом (10) – (13) расстояние между центром подсвечивающего элемента и центром объекта определяется следующим выражением:

$$l = \sqrt{(x_{O_1} - x_{O_2})^2 + (y_{O_1} - y_{O_2})^2} =$$

$$\begin{aligned}
&= \sqrt{(R \cdot \cos(\beta_0 - \omega \cdot t) - L)^2 + (R \cdot \sin(\beta_0 - \omega \cdot t))^2} = \\
&= \sqrt{R^2 \cdot \cos^2(\beta_0 - \omega \cdot t) - 2 \cdot R \cdot L \cdot \cos(\beta_0 - \omega \cdot t) + L^2 + R^2 \cdot \sin^2(\beta_0 - \omega \cdot t)} = \quad (14) \\
&= \sqrt{R^2 + L^2 - 2 \cdot R \cdot L \cdot \cos(\beta_0 - \omega \cdot t)} = \\
&= \sqrt{R^2 + (L_0 - v \cdot t)^2 - 2 \cdot R \cdot (L_0 - v \cdot t) \cdot \cos(\beta_0 - \omega \cdot t)}.
\end{aligned}$$

Подставив выражение (14) в выражения (5) и (6), получим математическую модель лазерной локации продукта круглой формы с учетом движения объекта в следующем виде:

$$\Phi = \begin{cases} \Phi_1 = \iint_D 2 \cdot (B(r, \varphi) \cdot r) dr d\varphi = 0, \text{ при } l > (r_1 + r_2); \\ \Phi_2 = 2 \cdot \left( \int_0^M d\varphi \int_0^{r_1} (B(r, \varphi) \cdot r) dr - \int_0^M d\varphi \int_0^N (B(r, \varphi) \cdot r) dr + \int_0^M d\varphi \int_N^{r_1} (B(r, \varphi) \cdot r) dr \right), r_2 < l \leq (r_1 + r_2); \\ \Phi_3 = 2 \cdot \int_0^M d\varphi \int_0^{r_1} (B(r, \varphi) \cdot r) dr + 2 \cdot \int_M^{\pi} d\varphi \int_0^N (B(r, \varphi) \cdot r) dr, (r_2 - r_1) < l \leq r_2; \\ \Phi_4 = \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^{r_1} (B(r, \varphi) \cdot r) dr, l > (r_2 - r_1), \end{cases} \quad (15)$$

где

$$\begin{aligned}
M &= \arccos \left( \frac{r_1^2 + \left( \sqrt{R^2 + (L_0 - v \cdot t)^2 - 2 \cdot R \cdot (L_0 - v \cdot t) \cdot \cos(\beta_0 - \omega \cdot t)} \right)^2 - r_2^2}{2 \cdot r_1 \cdot \left( \sqrt{R^2 + (L_0 - v \cdot t)^2 - 2 \cdot R \cdot (L_0 - v \cdot t) \cdot \cos(\beta_0 - \omega \cdot t)} \right)} \right); \\
N &= \sqrt{r_2^2 - \left( \sqrt{R^2 + (L_0 - v \cdot t)^2 - 2 \cdot R \cdot (L_0 - v \cdot t) \cdot \cos(\beta_0 - \omega \cdot t)} \right)^2} \cdot \sin^2 \varphi + \\
&\quad + \left( \sqrt{R^2 + (L_0 - v \cdot t)^2 - 2 \cdot R \cdot (L_0 - v \cdot t) \cdot \cos(\beta_0 - \omega \cdot t)} \right) \cdot \cos \varphi
\end{aligned}$$

Система (19) является математической моделью локационного сигнала в функции скорости движения объекта, частоты сканирования, радиуса зоны сканирования и радиуса подсвечивающего элемента.

Для оценки влияния режимных параметров на процесс лазерной локации численным методом исследована модель (15), описывающая форму локационных сигналов в режиме кругового сканирования. Для определенности положим распределение лазерного излучения в подсвечивающем элементе (светимость подсвечивающего элемента) в следующем виде:  $B(r, \varphi) = B_0 = const$ . В этом случае имеем:

$$\Phi_2 = 2 \cdot B_0 \cdot (I_1 + I_2 + I_3), \quad (16)$$

где

$$\begin{aligned}
I_1 &= \int_0^{\alpha} d\varphi \int_0^{r_1} r dr = \frac{1}{2} \int_0^{\alpha} (r_1^2) d\varphi = \frac{r_1^2 \cdot \alpha}{2}; \\
I_2 &= \int_0^{\alpha} d\varphi \int_0^r r dr = \frac{1}{2} \cdot \int_0^{\alpha} \left( \sqrt{r_2^2 - l^2 \cdot \sin^2 \varphi} + l \cdot \cos \varphi \right)^2 d\varphi =
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= \frac{1}{2} \cdot \int_0^{\alpha} \left( r_2^2 - l^2 \cdot \sin^2 \varphi + 2 \cdot l \cdot \cos \varphi \sqrt{r_2^2 - l^2 \cdot \sin^2 \varphi} + l^2 \cdot \cos^2 \varphi \right) d\varphi = \\
&= \frac{1}{2} \left( r_2^2 \cdot \alpha - \frac{l^2 \cdot \cos 2\alpha}{2} + l \cdot \sin \alpha \cdot \sqrt{r_2^2 - l^2 \cdot \sin^2 \alpha} + r_2^2 \cdot \arcsin \left( \frac{l \cdot \sin \alpha}{r_2} \right) \right); \\
I_3 &= \frac{1}{2} \cdot \left( (r_1^2 - r_2^2) \cdot \alpha - \frac{l^2 \cdot \cos 2\alpha}{2} + l \cdot \sin \alpha \cdot \sqrt{r_2^2 - l^2 \cdot \sin^2 \alpha} + r_2^2 \cdot \arcsin \left( \frac{l \cdot \sin \alpha}{r_2} \right) \right); \\
\Phi_3 &= 2 \cdot B_0 \cdot \int_0^{\alpha} d\varphi \int_0^{r_1} r dr + 2 \cdot B_0 \cdot \int_{\alpha}^{\pi} d\varphi \int_0^r r dr = B_0 \cdot \left( \int_0^{\alpha} (r_1^2) d\varphi + \int_{\alpha}^{\pi} (r^2) d\varphi \right) = \\
&= B_0 \cdot \left( r_1^2 \cdot \alpha + \int_{\alpha}^{\pi} \left( l \cdot \cos \varphi + \sqrt{r_2^2 - l^2 \cdot \sin^2 \varphi} \right)^2 d\varphi \right) = \\
&= B_0 \cdot \left( r_1^2 \cdot \alpha + r_2^2 \cdot (\pi - \alpha) - \frac{l^2}{2} \cdot \sin 2\alpha - I_4 \right), \tag{17}
\end{aligned}$$

где

$$\begin{aligned}
I_4 &= l \cdot \sin \alpha \cdot \sqrt{r_2^2 - l^2 \cdot \sin^2 \alpha} + r_2^2 \cdot \arcsin \left( \frac{l \cdot \sin \alpha}{r_2} \right) \\
\Phi_4 &= B_0 \cdot \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^{r_1} r dr = B_0 \cdot \frac{1}{2} \cdot \int_0^{2\pi} (r_1^2) d\varphi = B_0 \cdot \pi \cdot r_1^2
\end{aligned}$$

На рис. 4 приведены зависимости отраженного светового потока от времени при различных размерах подсвечивающего элемента, координаты центра которого одинаковы для всех трех случаев.

На рис. 5 приведены зависимости отраженного светового потока от времени при различной скорости движения объекта и постоянном размере подсвечивающего элемента.

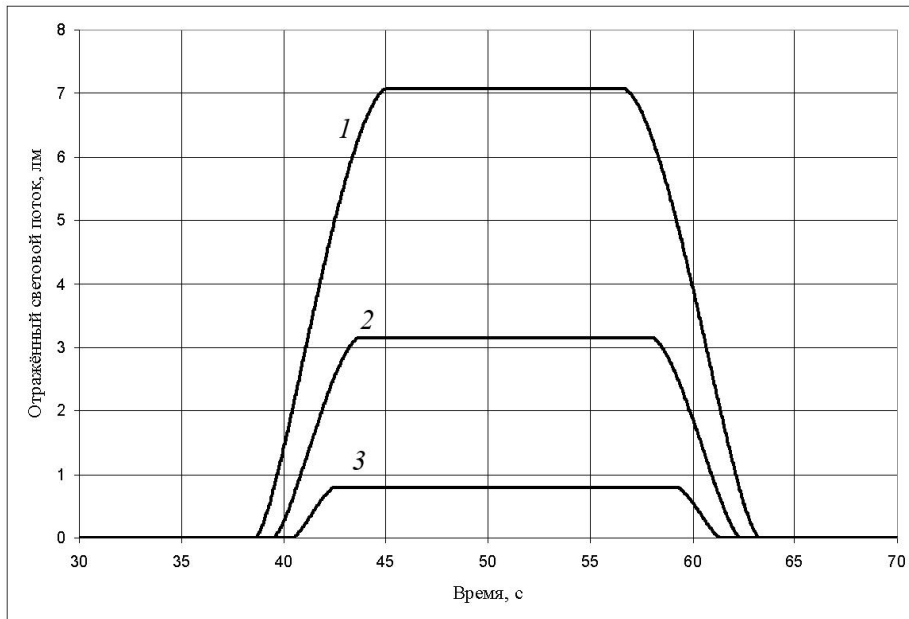


Рисунок 4 – Локационные сигналы при различных размерах подсвечивающего элемента:

1:  $r_1 = 15$  мм; 2:  $r_1 = 10$  мм; 3:  $r_1 = 5$  мм

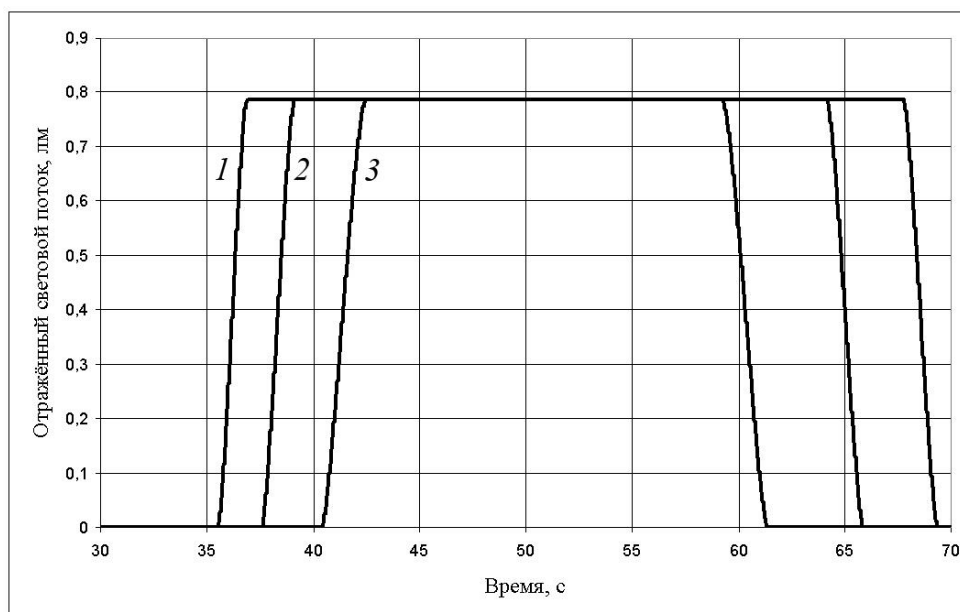


Рисунок 5 – Локационные сигналы при различной скорости движения объекта

$$(r_1 = 5 \text{ мм}, \omega = 0,05 \cdot 2\pi \text{ радиан/с}):$$

$$1: v = 1,5 \text{ мм/с}; 2: v = 1 \text{ мм/с}; 3: v = 0,5 \text{ мм/с}$$

Как видно из рис. 4, 5, заметное влияние на форму локационного сигнала оказывают скорость движения объекта, размер подсвечивающего элемента и частота кругового сканирования.

При увеличении радиуса подсвечивающего элемента существенно возрастает отраженный световой поток, что повышает надежность локации объекта в условиях помех. Однако как видно из рис. 4, это приводит к затратам электрической мощности лазерного источника и заметному снижению точности измерения геометрических параметров объекта. Кроме того, повышаются требования к классу безопасности лазерного прибора. Таким образом, требуются рациональные соотношения между светочувствительностью фотоприемника, мощностью лазерного источника и точностью измерения параметров объекта.

При увеличении скорости движения объекта количество его пересечений с подсвечивающим элементом сокращается. Уровень локационных сигналов при этом не меняется. В связи с этим происходят потери полезного сигнала, несущего информацию о геометрической форме объекта и его размерах. Следовательно, снижается точность измерения геометрических параметров объекта, что видно из рис. 5. Для компенсации этого явления необходимо снижать скорость перемещения объекта, (что не всегда возможно), а также увеличивать частоту кругового сканирования.

При увеличении частоты кругового сканирования заметно увеличивается количество пересечений объекта подсвечивающим элементом, в связи с чем возрастает точность измерения геометрических параметров. В локационном сигнале с ростом частоты сканирования содержится больше информации о форме объекта и его размерах.

Полученные модельные сигналы (рис. 4, 5) очень близки по форме к реальным локационным сигналам в экспериментальной установке лазерной локации в случае кругового сканирования.

## СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Агеев, О.В. Разработка видеокomпьютерного модуля для мехатронного комплекса первичной обработки рыбы / О.В. Агеев, Ю.А. Фатыхов // Известия Калининградского государственного технического университета. – 2014. – № 34. – С. 113–126.

2. Агеев, О.В. Применение видеокомпьютерной техники для исследования морфометрических параметров рыбы (Часть 1. Разработка аппаратного обеспечения видеокомпьютерного устройства) / О.В. Агеев, Ю.А. Фатыхов // Электронный научный журнал Санкт-Петербургского национального исследовательского университета информационных технологий, механики и оптики. Сер.: Процессы и аппараты пищевых производств [Электронный ресурс]. – Санкт-Петербург: НИУ ИТМО, 2015. – № 1 (23). – Шифр: ЭЛ № ФС77–55245. – Режим доступа: <http://processes.ihbt.ifmo.ru/file/article/11452.pdf>.

3. Агеев, О.В. Применение видеокомпьютерной техники для исследования морфометрических параметров рыбы (Часть 2. Разработка программного обеспечения видеокомпьютерного устройства) / О.В. Агеев, Ю.А. Фатыхов // Электронный научный журнал Санкт-Петербургского национального исследовательского университета информационных технологий, механики и оптики. Сер.: Процессы и аппараты пищевых производств [Электронный ресурс]. – Санкт-Петербург: НИУ ИТМО, 2015. – № 2 (24). – Шифр: ЭЛ № ФС77–55245. – Режим доступа: <http://processes.ihbt.ifmo.ru/file/article/13407.pdf>.

4. Агеев, О.В. Способ и алгоритм ориентирования рыбы на основе мехатроники / О.В. Агеев [и др.] // Известия Калининградского государственного технического университета. – 2016. – № 42. – С. 89–103.

#### DEVELOPMENT OF THE MATHEMATICAL MODEL OF THE PROCESS OF LASER SCANNING OF ROUND FOODSTUFFS

A.E. Eryvanov, post-graduate student  
anatoliy.eryvanov@klgtu.ru

N.V. Samojlova, post-graduate student  
procyon@mail.ru

O.V. Ageev, Candidate of Engineering Sciences, assistant professor  
oleg.ageev@klgtu.ru

Ju.A. Fatykhov, Doctor of Sciences, professor  
elina@klgtu.ru

Kaliningrad State Technical University

M.A. Padalko, post-graduate student  
padalkom@gmail.com

Immanuel Kant Baltic Federal University

The topicality of the using active laser location for measuring of the geometric parameters of food products is shown. The modes of laser detection of the product of a circular shape are examined with a circular scanning of the illuminating element. The mathematical model describing the reflected light flux as a function of the object's speed, the scanning frequency, the radius of the scanning zone and the radius of the illuminating element is obtained. The dependence of the reflected light flux on time at different speeds of the measured object of circular shape, different radii of the illuminating element and various frequencies of circular scanning was studied numerically.

*laser, scanning, illuminating element, luminosity, light flux, product, model*