



## РАЗРЕШЕНИЕ ПРОСТРАНСТВЕННЫХ СИГНАЛОВ С ПРИМЕНЕНИЕМ ПРЕОБРАЗОВАННОГО ФУНКЦИОНАЛА ПРАВДОПОДОБИЯ

Р.В. Симонов, аспирант,  
rsvv20@yandex.ru

В.А. Пахотин, д-р физ.-мат. наук, профессор,  
vpakhotin@kantiana.ru

К.В. Власова, к.ф.-м.н., доцент,  
p\_ksenia@mail.ru

А.И. Бабинович, аспирант,

Балтийский федеральный университет им. И. Канта,  
Калининградский государственный технический университет

Представлены результаты применения метода максимального правдоподобия к задаче углового разрешения пространственных сигналов. Для оценок параметров двух сигналов используется непосредственная минимизация преобразованного функционала правдоподобия цифровыми методами. Показана возможность повышения разрешения по сравнению с Рэлеевским разрешением.

*функционал правдоподобия, пространственное разрешение, диаграмма направленности, угловой спектр, радиолокация*

**Введение.** В настоящее время в системах локации наряду с фазированными антенными системами используются многоканальные антенные системы. Они представляют собой многоканальные измерители напряженности поля в раскрыве антенны. Многоканальная антенная система подключается к многоканальному приемнику и далее к многоканальному аналого-цифровому преобразователю. Основная обработка при этом, включая формирование диаграммы направленности, проводится в ЭВМ. Такая структура антенных систем позволяет использовать сложные методы пространственно-временной обработки сигнала. Традиционно для оценки параметров и разрешения пространственных сигналов используются уравнения правдоподобия [1]. Их решения формируют диаграмму направленности, максимум которой определяет азимут и угол места пространственного сигнала. При наличии двух или нескольких сигналов в принятом сообщении формируется угловой спектр, который имеет несколько максимумов. При сближении целей максимумы сближаются и в конечном итоге сливаются вместе. Возможность их разрешения определяется критерием Рэля. Таким образом, критерий Рэля ограничивает возможности технологии решения задач разрешения и оценки параметров пространственных сигналов на основе уравнений правдоподобия.

В многоканальных антенных системах возможна другая технология решения данных задач. Она основана на непосредственной минимизации функционала правдоподобия цифровыми методами без перехода к уравнениям правдоподобия. В этом случае формируется поверхность функционала правдоподобия в пространстве параметров [2]. Минимум этой поверхности, как критерий, определяет все параметры совокупности сигналов. Минимум единственный. В связи с этим нет необходимости определять такие термины, как разрешение и разрешающая способность. Для минимизации функционала правдоподобия удобнее перейти к преобразованному функционалу правдоподобия. В этом случае его поверхность становится более гладкой, и размерность пространства параметров уменьшается. Из рассмотрения исключаются энергетические параметры (амплитуды сигналов).

Таким образом, целью настоящей работы является решение задачи оценки параметров двух и более пространственных сигналов и проведение сравнительного анализа двух техно-

логий решения: технологии, основанной на уравнениях правдоподобия и технологии, основанной на минимизации функционала правдоподобия цифровыми методами.

**Основы теории.** Рассмотрим обработку двух пространственных сигналов, принимаемых прямоугольной антенной решеткой, состоящей из элементарных вибраторов с изотропной диаграммой направленности. Запишем принятое сообщение в виде:

$$\hat{Y}(x, y) = \hat{U}_1 \exp(-i(k_{1x}x + k_{1y}y)) + \hat{U}_2 \exp(-i(k_{2x}x + k_{2y}y)) + \hat{U}_{ш}(x, y), \quad (1)$$

где  $\hat{U}_1, \hat{U}_2$  – комплексные амплитуды двух пространственных сигналов,

$$k_{1x} = \frac{2\pi}{\lambda} \cos(\beta_1) \cos(\alpha_1), \quad k_{2x} = \frac{2\pi}{\lambda} \cos(\beta_2) \cos(\alpha_2)$$

$$k_{1y} = \frac{2\pi}{\lambda} \cos(\beta_1) \sin(\alpha_1), \quad k_{2y} = \frac{2\pi}{\lambda} \cos(\beta_2) \sin(\alpha_2)$$

$\alpha_1, \alpha_2, \beta_1, \beta_2$  – азимуты и углы места двух целей,  $\lambda$  – длина волны,

$\hat{U}_{ш}(x, y)$  – двумерный комплексный шум, квадратурные компоненты которого распределены по нормальному закону с дисперсией  $\sigma^2$ , средним значением, равным нулю, и интервалом корреляции  $\tau_k$ , равным интервалу между вибраторами по осям  $x$  и  $y$ . На основании (1) запишем логарифм функции правдоподобия в интегральном виде:

$$\ln(L(\gamma')) = \frac{1}{(2\sigma^2\tau_k)^2} \iint_{x,y} \left| \hat{Y}(x, y) - \hat{U}'_1 \exp(-i(k'_{1x}x + k'_{1y}y)) - \hat{U}'_2 \exp(-i(k'_{2x}x + k'_{2y}y)) \right|^2 dx dy, \quad (2)$$

где  $\gamma'$  – вектор параметров двух сигналов, штрихами отмечены оцениваемые параметры.

Перейдем к уравнениям правдоподобия. Для этого продифференцируем (2) по  $\hat{U}'_1$  и  $\hat{U}'_2$  и приравняем дифференциалы нулю. В результате получим систему уравнений, решая которую можно получить две функциональные зависимости:

$$\hat{U}'_1(\alpha'_1, \beta'_1, \alpha'_2, \beta'_2) = \frac{\overline{\hat{Y}(x, y) \exp(i(k'_{1x}x + k'_{1y}y))} - \hat{R} \overline{\hat{Y}(x, y) \exp(i(k'_{2x}x + k'_{2y}y))}}{1 - |\hat{R}|^2} \quad (3)$$

$$\hat{U}'_2(\alpha'_1, \beta'_1, \alpha'_2, \beta'_2) = \frac{\overline{\hat{Y}(x, y) \exp(i(k'_{2x}x + k'_{2y}y))} - \hat{R}^* \overline{\hat{Y}(x, y) \exp(i(k'_{1x}x + k'_{1y}y))}}{1 - |\hat{R}|^2}$$

где  $\hat{R} = \overline{\exp(i(k'_{x1}x - k'_{x2}x + k'_{y1}y - k'_{y2}y))}$  – комплексный коэффициент корреляции между сигналами. Верхняя черта здесь обозначает интегрирование. При условии ортогональности пространственных сигналов, когда  $|\hat{R}| = 0$ , выражения (3) преобразуются в известные выражения (4), которые определяют диаграммы направленности:

$$\hat{U}'_1(\alpha'_1, \beta'_1) = \overline{\hat{Y}(x, y) \exp(i(k'_{1x}x + k'_{1y}y))} \quad (4)$$

$$\hat{U}'_2(\alpha'_2, \beta'_2) = \overline{\hat{Y}(x, y) \exp(i(k'_{2x}x + k'_{2y}y))}$$

Выражения (3) не позволяют получить решения задачи оценки параметров в области неортогональности двух пространственных сигналов, когда диаграммы направленности частично совпадают. За счет явления интерференции критерий отбора решений (максимум углового спектра) зависит от соотношения амплитуд и разности начальных фаз. Для получения решения задачи оценки параметров в области неортогональности пространственных сигнала-

лов перейдем от уравнений правдоподобия к преобразованному функционалу правдоподобия. Подставим (3) в (2) и преобразуем выражение. Получим:

$$\Delta(\alpha'_1, \beta'_1, \alpha'_2, \beta'_2) = \iint_{x,y} |\hat{Y}(x, y)|^2 dx dy - \iint_{x,y} \hat{U}'_1 \exp(-i(k'_{1x}x + k'_{1y}y)) - \hat{U}'_2 \exp(-i(k'_{2x}x + k'_{2y}y)) dx dy \quad (5)$$

Преобразованный функционал правдоподобия в четырехмерном пространстве параметров  $\alpha'_1, \beta'_1, \alpha'_2, \beta'_2$  представляет собой поверхность с минимумом в точке  $\alpha'_1 = \alpha_1, \beta'_1 = \beta_1, \alpha'_2 = \alpha_2, \beta'_2 = \beta_2$ . В этой же точке функциональные зависимости (3) дают оценки амплитуд сигналов:  $\hat{U}'_1 = \hat{U}'_1(\alpha'_1 = \alpha_1, \beta'_1 = \beta_1, \alpha'_2 = \alpha_2, \beta'_2 = \beta_2)$ ,  $\hat{U}'_2 = \hat{U}'_2(\alpha'_1 = \alpha_1, \beta'_1 = \beta_1, \alpha'_2 = \alpha_2, \beta'_2 = \beta_2)$ . Значение минимума функционала определяет оценку дисперсии шума  $\sigma^{2'}$  в принятом сообщении [3].

Таким образом, задача оценки параметров пространственных сигналов, отражённых от двух целей, оказывается решенной как в области их ортогональности, так и в области неортогональности.

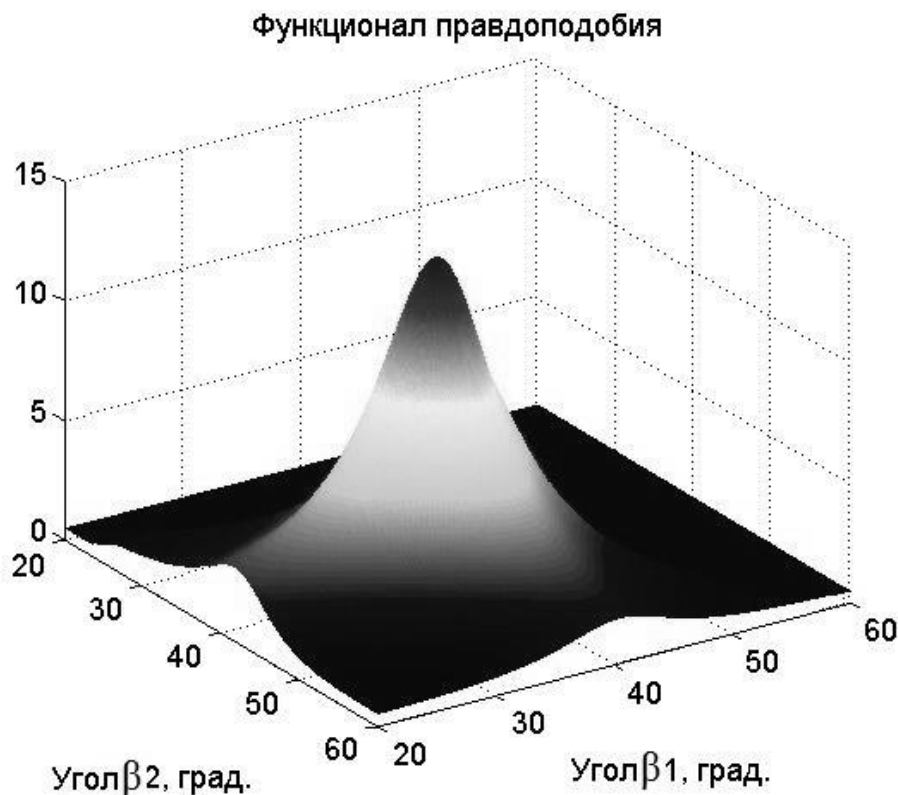


Рисунок 1 - Поверхность обратного функционала правдоподобия

На рисунке 1 в качестве иллюстрации показана поверхность обратного функционала правдоподобия  $\Delta_1 = \frac{1}{\Delta(\alpha'_1, \beta'_1, \alpha'_2, \beta'_2)}$  при фиксированных  $\alpha'_1 = \alpha_1, \alpha'_2 = \alpha_2$ . На рисунках максимум отображается лучше, чем минимум. Согласно данному рисунку, максимум обратного функционала правдоподобия единственный. Он является критерием для отбора решений. Необходимости в решении задачи разрешения не требуется.

Эффективность решения, получаемого на основе минимума преобразованного функционала правдоподобия, может быть показана с применением неравенства Рао-Крамера, которое позволяет рассчитать минимальные дисперсии Рао-Крамера параметров сигнала  $D_{\lambda_{эф}}$ :

$$D_{\hat{\lambda}_j} \geq \left\{ \left( \frac{\partial}{\partial \lambda} \ln L(\gamma') \right)^2 \right\}^{-1} = - \left\{ M \left( \frac{\partial^2 \ln L(\gamma')}{\partial \lambda_i \partial \lambda_j} \right) \right\}^{-1} = D_{\lambda_{\phi}} \quad (6)$$

Если дисперсия полученных оценок параметров соответствует дисперсии Рао-Крамера, такие оценки являются эффективными [4, 5].

Элементы матрицы Фишера задаются выражением:

$$J_{ij} = -M \left( \frac{\partial^2 \ln L(\gamma')}{\partial \gamma_i \partial \gamma_j} \right) \quad (7)$$

Диагональные элементы обратной к ней матрицы определяют дисперсии Рао-Крамера параметров сигнала.

Дважды дифференцируя (2) по углам места, получим:

$$J = \begin{pmatrix} \frac{4\pi^2 YX^3 \sin^2 \beta'_1 |\hat{U}'_1|^2}{3\sigma^2 p_x p_y \lambda^2} & \frac{4\pi^2 YX^3 \sin \beta'_1 \sin \beta'_2 \hat{U}'_1 \hat{U}'_2 R_a}{3\sigma^2 p_x p_y \lambda^2} \\ \frac{4\pi^2 YX^3 \sin \beta'_1 \sin \beta'_2 \hat{U}'_1 \hat{U}'_2 R_a^*}{3\sigma^2 p_x p_y \lambda^2} & \frac{4\pi^2 YX^3 \sin^2 \beta'_2 |\hat{U}'_2|^2}{3\sigma^2 p_x p_y \lambda^2} \end{pmatrix} \quad (8)$$

Здесь X, Y – стороны прямоугольной антенной решётки, выраженные в длинах волн. Вычисляя обратную матрицу, находим выражения для дисперсий Рао-Крамера углов места:

$$D_{\beta_1} = J^{-1}_{1.1} = \frac{3\sigma^2 \lambda^2}{4\pi^2 X^2 \sin^2 \beta'_1 |\hat{U}'_1|^2 NM (1 - |R_a|^2)},$$

$$D_{\beta_2} = J^{-1}_{2.2} = \frac{3\sigma^2 \lambda^2}{4\pi^2 X^2 \sin^2 \beta'_2 |\hat{U}'_2|^2 NM (1 - |R_a|^2)}, \quad (9)$$

где  $\hat{R}_a = \frac{3}{X^3} \int_x x^2 \exp\left(\frac{2\pi x i}{\lambda} (\cos \beta'_1 - \cos \beta'_2)\right) dx$ . При выводе выражений полагалось, что

значения напряжённости поля на соседних элементах антенной решётки некоррелированы.

Коэффициенты пространственной корреляции заданы выражениями:  $p_x = \frac{X}{M}$ ,  $p_y = \frac{Y}{N}$ . Здесь

M, N – число элементов антенной решетки, расположенных на сторонах прямоугольника X и Y соответственно. Значение азимута полагалось равным нулю.

Таким же образом может быть получено выражение для дисперсии Рао-Крамера амплитуды сигнала:  $D_u = \frac{\sigma^2}{MN(1 - |\hat{R}|^2)}$ . Выделяя дисперсию при коэффициенте корреляции  $\hat{R}$ ,

равном нулю  $D_{U_0} = D_U(\hat{R} = 0) = \frac{\sigma^2}{MN}$ , можно получить выражение для относительной дисперсии

амплитуды:  $D_{U_{\text{отн}}} = \frac{D_U}{D_{U_0}} = \frac{1}{1 - |\hat{R}|^2}$ . Его зависимость от коэффициента корреляции, показанная

на рисунке (2), позволяет определить границу области разрешения пространственных сигналов.

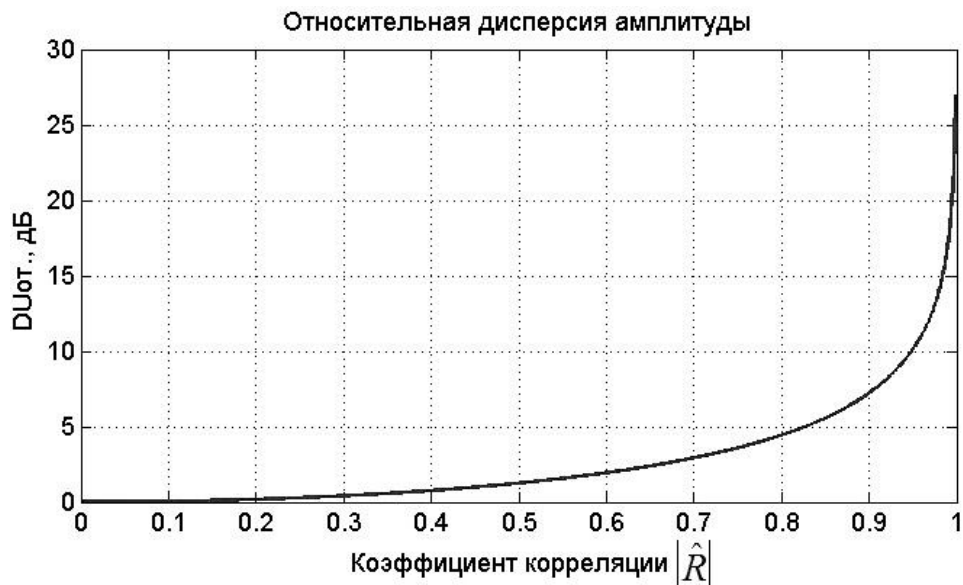


Рисунок 2 - Зависимость относительной дисперсии амплитуды от коэффициента корреляции

Отмечается, что дисперсия возрастает с увеличением коэффициента корреляции. Если принять возрастание дисперсии равным 7 дБ., область разрешения пространственных сигналов ограничивается коэффициентом корреляции 0,9.

**Результаты модельных расчётов.** На рис. 3 в полярной системе координат показаны угловые спектры сигналов, отражённых от двух целей, для случая (а) малой корреляции между сигналами ( $|\hat{R}|=0.24$ ) и для случая (в) высокой корреляции ( $|\hat{R}|=0.56$ ). Линиями отмечены углы места, оцененные по минимуму преобразованного функционала правдоподобия. На рисунке 4 показаны оценки углов места, полученные при различных отношениях сигнал/шум от 20 до 0 дБ. Они соответствуют двум рассматриваемым значениям коэффициента корреляции. Амплитуды пространственных сигналов предполагаются равными. Оценки, соответствующие минимуму преобразованного функционала правдоподобия обозначены точками. Оценки, полученные при решении уравнений правдоподобия показаны маркером «кружок». Линиями показаны среднеквадратичные отклонения, соответствующие дисперсии Рао-Крамера углов места, вычисляемой согласно выражению (9).

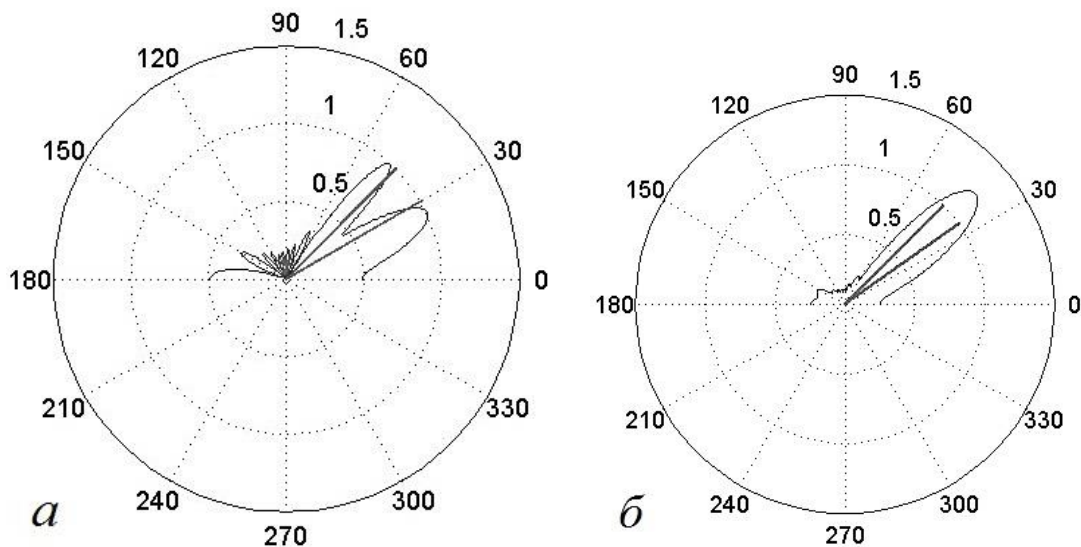


Рисунок 3 - Угловые спектры сигнала в области низкой (а) и высокой (б) корреляции

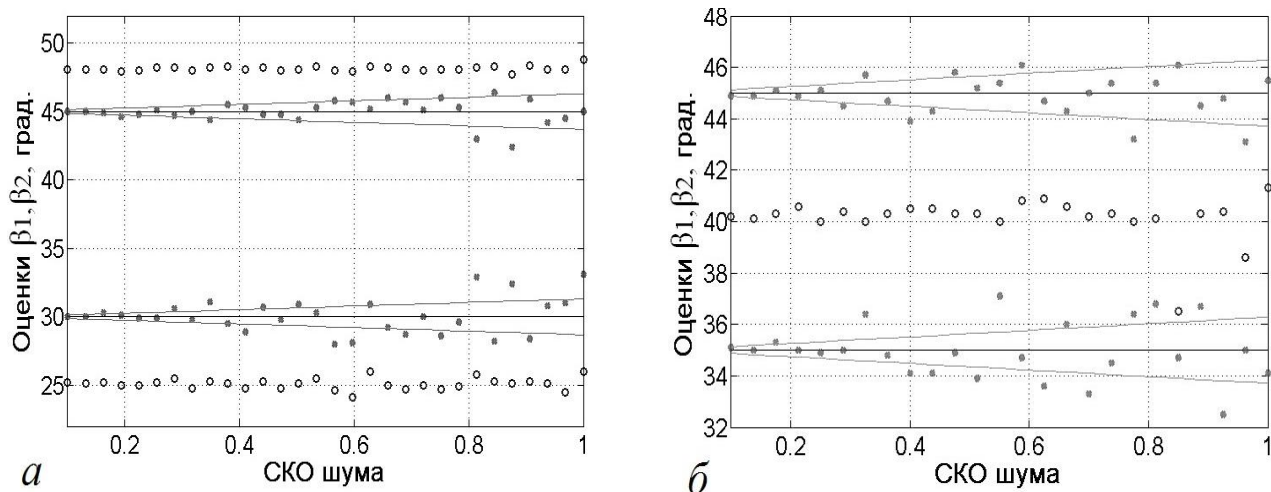


Рисунок 4 - Оценки углов места в области низкой (а) и высокой (б) корреляции

Рисунки показывают, что технология оценивания параметров пространственных сигналов, основанная на непосредственной минимизации преобразованного функционала правдоподобия, позволяет получить оценки углов места даже в области неортогональности, где максимумы углового спектра сливаются и подвержены сильным интерференционным искажениям. Отмечается несмещённость и эффективность полученных решений.

На рисунке 5 показаны оценки азимутов и углов места двух пространственных сигналов, полученные при решении уравнений правдоподобия (маркер «кружок») и по технологии минимизации преобразованного функционала правдоподобия (маркер «крестик»). В модели сигнала угол места первой цели изменялся линейно от 90 до 0 градусов. Угол места второй цели менялся от 0 до 90 градусов. Азимуты на цели были одинаковыми и менялись линейно от 0 до 180 градусов. При таких изменениях азимутов и углов места цели сближаются и расходятся, создавая условия как ортогональности, так и неортогональности пространственных сигналов.

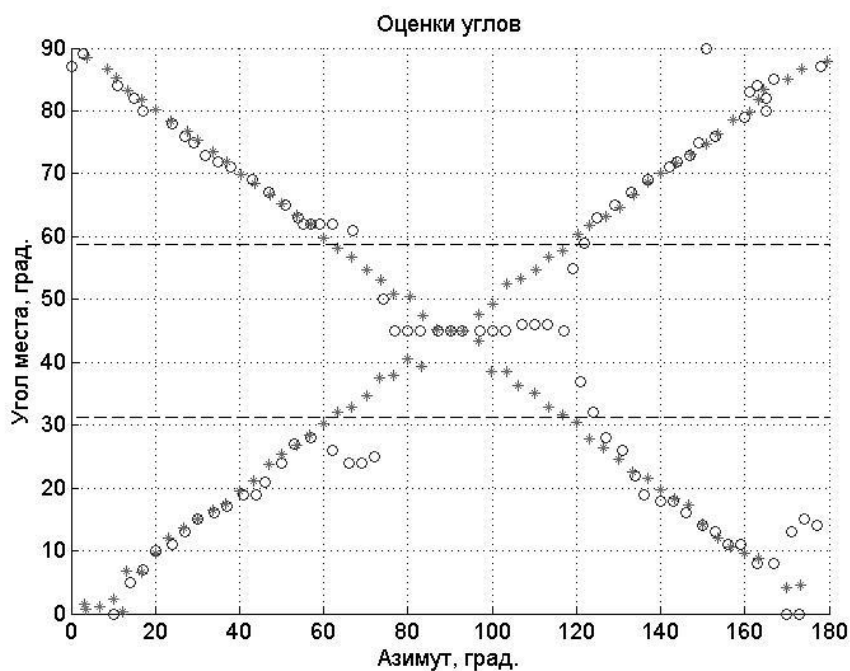


Рисунок 5 - Оценки азимутов и углов места двух пространственных сигналов, представленных на плоскости азимут-угол места

Рисунок иллюстрирует большие погрешности при оценке азимутов и углов места по технологии уравнений правдоподобия, связанные как с областью неортогональности, так и с наличием боковых лепестков диаграмм направленности.

На рисунке 6 показаны оценки амплитуд и углов места, полученные при различных отношениях амплитуд пространственных сигналов. Амплитуда одного из них в модельном эксперименте остаётся постоянной, амплитуда другого – линейно изменяется. Оценки, соответствующие минимуму преобразованного функционала правдоподобия, обозначены точками. Оценки, полученные при решении уравнений правдоподобия, показаны маркером «кружок».

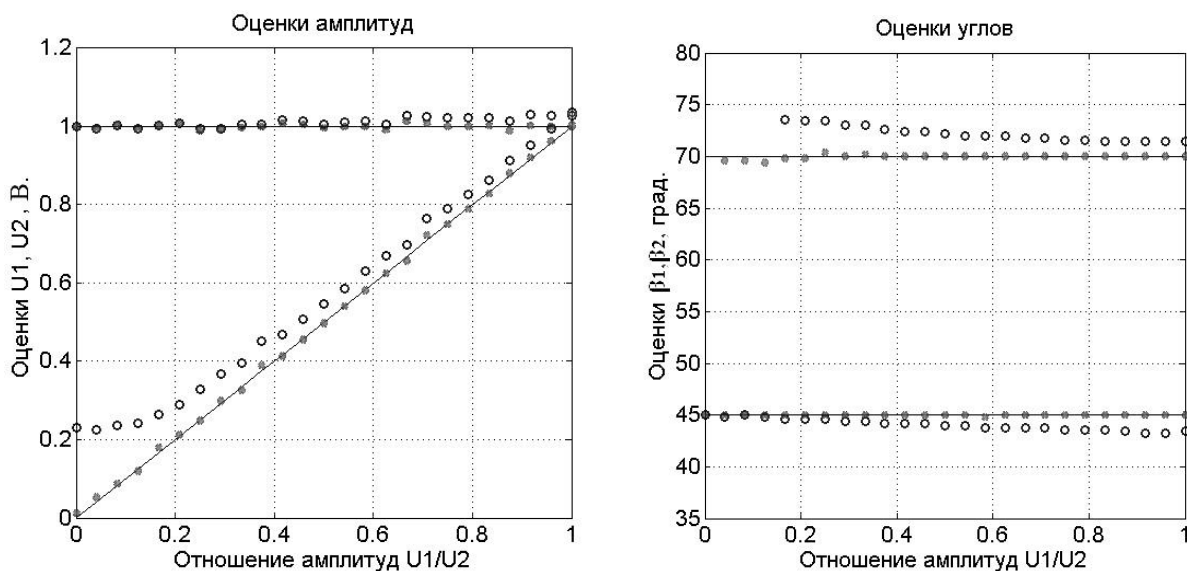


Рисунок 6 - Оценки амплитуд и углов места при различных отношениях амплитуд сигналов

Отмечается, что решение уравнений правдоподобия не позволяет получить оценки параметров более слабого сигнала, если его амплитуда составляет менее 20% от амплитуды более сильного. Это связано с ограничением динамического диапазона уровнем боковых лепестков диаграммы направленности антенной системы.

Динамический диапазон, обеспечиваемый решением, основанным на преобразованном функционале правдоподобия, ограничен только уровнем шума.

**Заключение.** Представленная в настоящей работе технология оценки угловых параметров пространственных сигналов, основанная на непосредственной минимизации преобразованного функционала правдоподобия, позволяет существенно улучшить разрешающую способность по сравнению с методом, основанным на решении уравнений правдоподобия, и обеспечить более широкий динамический диапазон.

## СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Ширман, Я.Д. Разрешение и сжатие сигналов / Я.Д. Ширман – Москва: Сов. Радио, 1974. – 361 с.
2. Пахотин, В.А. Разрешающая способность оптических приборов / В.А. Пахотин [и др.]. – Калининград: Вестник БФУ им. И. Канта. – Вып. 4. – 2012. – с. 26–33.
3. Пахотин, В.А. Теоретические основы оптимальной обработки сигналов / В.А. Пахотин. – Калининград: Изд-во РГУ им. И. Канта, 2008.
4. Перов, А.И. Статистическая теория радиотехнических систем / А.И. Перов. – Москва: Радиотехника, 2003. – 399 с.
5. Тихонов, В.И. Оптимальный прием сигналов / В.И. Тихонов. – Москва: Радио и связь, 1983. – 320 с.

RESOLUTION OF THE SPATIAL SIGNALS  
BY TRANSFORMED LIKELIHOOD FUNCTIONAL

R.V. Simonov, PhD student,  
rsvv20@yandex.ru

V.A. Pakhotin, Dr. Sc. (Phys.-Math.), professor,  
vpakhotin@kantiana.ru,

Baltic Federal University of I. Kant,

K.V. Vlasova, Associate Professor,

p\_ksenia@mail.ru

A.I. Babinovich, PhD student

FGBOU VO “Kaliningrad State Technical University”

The article presents the results of applying the method of maximum likelihood to the problem of angular resolution of spatial signals. Direct minimization of the transformed likelihood functional by digital methods is used to get the estimations of the parameters of two signals. The results obtained show the possibility of increasing the resolution in comparison to the Rayleigh resolution limit.

*likelihood functional, spatial resolution, beam pattern, angular spectrum, radiolocation*